LA FIGURA DE LA TIERRA

MATEMÁTICA DE JORGE JUAN

PROFESOR

DIEGO GARCÍA CASTAÑO

LA ASAMBLEA AMISTOSA LITERARIA

La Figura de la Tierra

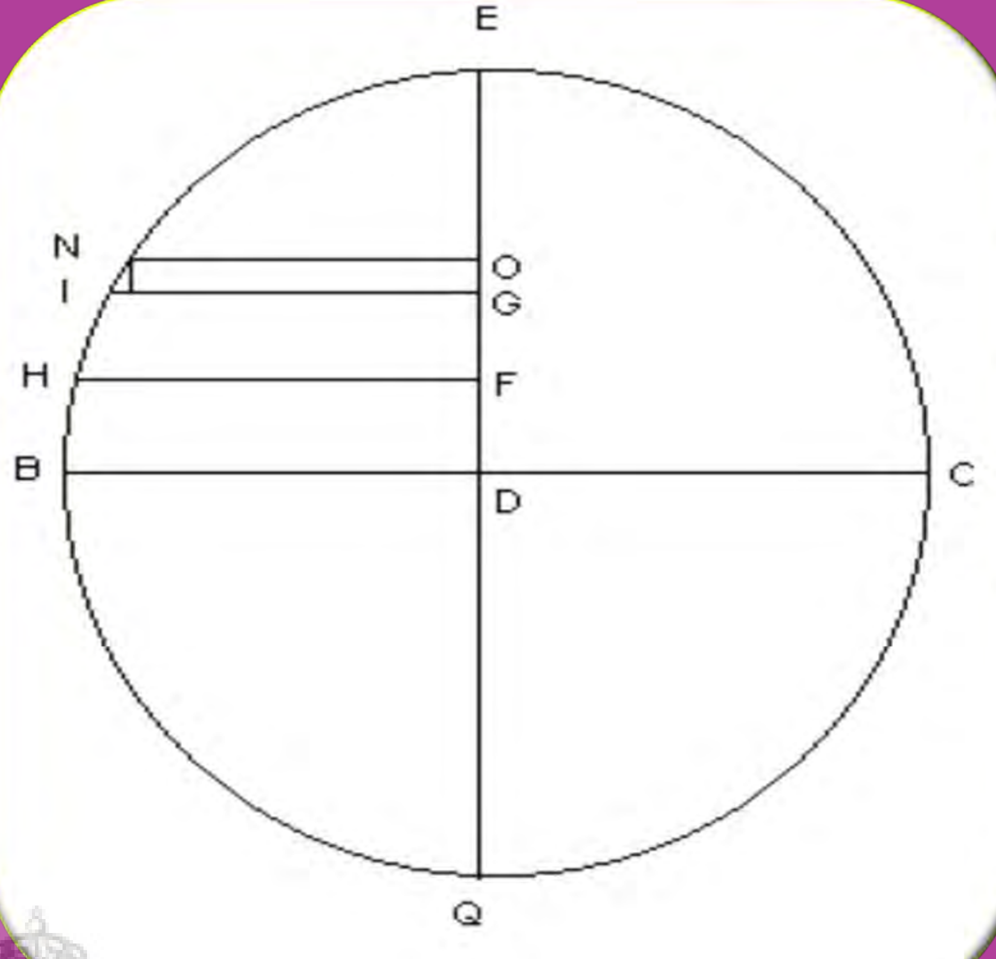

Fig. 1

$E\ (0,0)$; $ED = R$ (ECUADOR)

DB = SEMIEJE DE LA TIERRA $= 1$;

$GI = y_1$; $FH = y_0$

Ecuaciones de la elipse :

$x = R + R\cos\varphi;\ y = \operatorname{sen}\varphi$

φ = latitud

$$(x-R)^2/R^2+y^2 = 1$$

Jorge Juan :

$$R^2y^2=2Rx-x^2 \quad (1)$$

AJUSTE DE ARCOS DE ELIPSE Y CIRCUNFERENCIA (I)

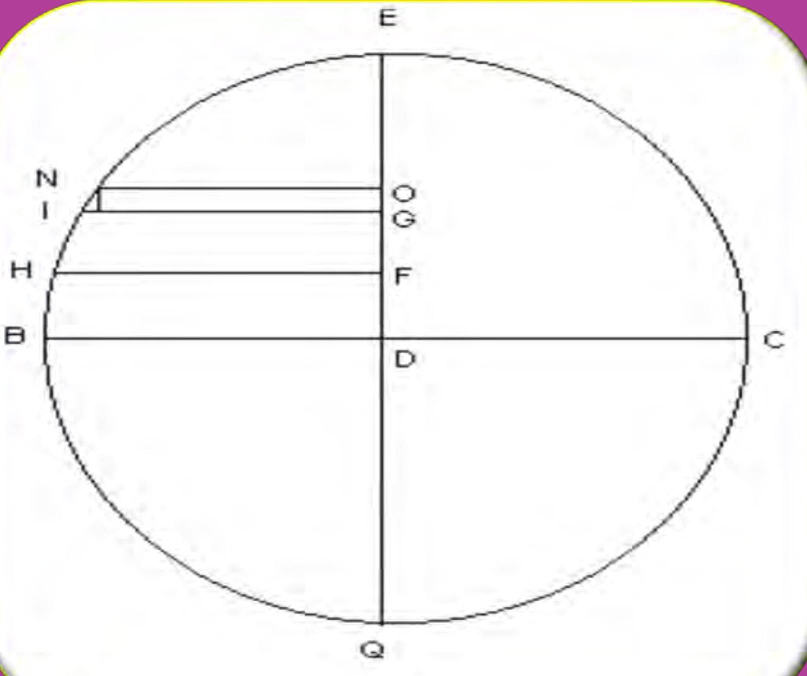

Fig. 1

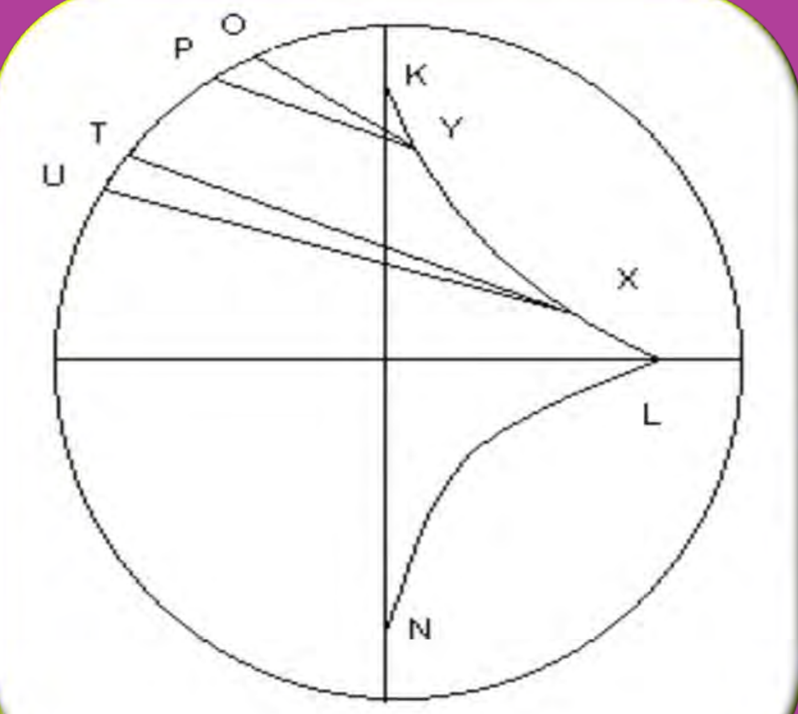

Fig. 2

H e I , puntos medios delos arcos (grados), UT=m y OP=μ

AJUSTE DE ARCOS DE ELIPSE Y CIRCUNFERENCIA (II)

Como si ^OYP = ^TXU = 1 grado ó 1 minuto

UT = OP

CIRCULOS DE CURVATURA

$$\frac{r_h}{r_i} = \frac{m}{\mu} \quad (2)$$

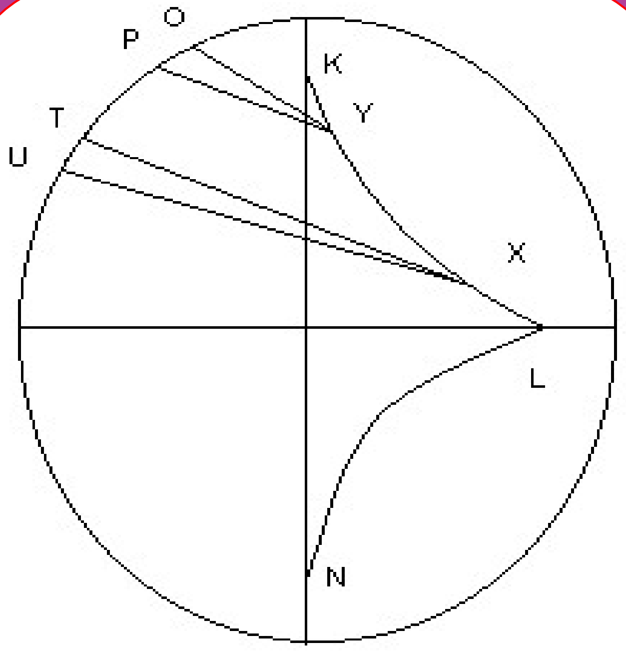

Fig. 2

CÁLCULO DEL RADIO DE CURVATURA EN UN PUNTO DE ELIPSE

$$R^2 y^2 = 2Rx - x^2 \qquad (1)$$

$$\boxed{r = \frac{\left((dx)^2 + (dy)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-dx\, d^2 y} \qquad (3)}$$

$$R^2 y\, dy = R\, dx - x\, dx$$

$$d(dx) = d^2 x = 0$$

$$dx = \frac{R^2 y\, dy}{R - x} \qquad (4)$$

$$R(dy)^2(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} + R y d^2 y (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} + R y^2 (dy)^2 (1-y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$x = R \pm R(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$R(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$dx = \mp R y\, dy (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

$$-d^2 y = \frac{(dy)^2}{y(1-y^2)} \qquad (6)$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \frac{(dy)^2 + (R^2-1) y^2 (dy)^2}{1-y^2} \qquad (7)$$

$$\boxed{r = \frac{\left(1 + (R^2-1) y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{R}}$$

RAZÓN ENTRE EL EJE Y EL DIÁMETRO DEL ECUADOR

$$\frac{r_h}{r_i} = \frac{m}{\mu} \qquad (2)$$

$$\frac{\left(1 + (R^2 - 1)\, y_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + (R^2 - 1)\, y_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{\mu}$$

$$R = \left(\frac{m^{\frac{2}{3}} - \mu^{\frac{2}{3}}}{\mu^{\frac{2}{3}}\, y_0^2 - m^{\frac{2}{3}}\, y_1^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\Re = \frac{BC}{2R} = \frac{2}{2R} = \frac{1}{R} = \left(\frac{m^{\frac{2}{3}} - \mu^{\frac{2}{3}}}{\mu^{\frac{2}{3}}\, y_0^2 - m^{\frac{2}{3}}\, y_1^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

MEDIDA RADIO ECUADOR EN SEMIEJES TIERRA

Si H está en el Polo e I en el Ecuador

m=111946 m. ;μ= 110640 m. y_0 =1; y_1 =0. Con ello y las fórmulas (8) y (9), tenemos que:

Radio del Ecuador R = 1,0039193 semiejes de la Tierra; exceso del radio del ecuador respecto al semieje δ = 0,0039193 ~ 1/265 semiejes de la Tierra, y como R= 1+ δ ~ 266/265 tendremos que $\Re$ = 1/R ~ 265/266

LOS DOS PRIMEROS COROLARIOS

En los corolarios $\mu = m_{0º} = 110640{,}42$ m., y todos los excesos van referidos a él, o sea, $\varepsilon = m - \mu$, $\delta = R - 1 = 0{,}0039193$ y la longitud del semieje de la Tierra es 1, al tomarse como unidad de medida.

Corolario I .- Toma en (8) el μ del Perú y como su $y_1 = 0$ saca:

$$R = \left(\frac{m^{\frac{2}{3}} - \mu^{\frac{2}{3}}}{\mu^{\frac{2}{3}} y_0^{\,2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (I)$$

Corolario II .- Tomó en (I) la m de Laponia y como su $y_0 = 1$ obtuvo:

$$R^3 = \frac{m}{\mu} \qquad (II)$$

Los cálculos que realizamos, aplicando la fórmula (8), para encontrar R=1'0039193 semiejes de la Tierra, resultarían más cortos utilizando la (II).

EXCESO DEL RADIO DEL ECUADOR RESPECTO AL EJE

Corolario III .- Para calcular el exceso δ del radio R del Ecuador respecto al semieje, puso:

$$R = 1 + \delta$$

elevó al cuadrado $R^2 = 1+\delta^2+2\delta$

sustituyó R por (8) y obtuvo despreciando δ^2 que:

$$R^2 = 1 + 2\delta = \frac{m^{\frac{2}{3}} - \mu^{\frac{2}{3}}}{\mu^{\frac{2}{3}} y_0^2 - m^{\frac{2}{3}} y_1^2} + 1$$

de aquí:

$$\delta = \frac{m^{\frac{2}{3}} - \mu^{\frac{2}{3}}}{2(\mu^{\frac{2}{3}} y_0^2 - m^{\frac{2}{3}} y_1^2)} \quad (III)$$

si m es el de Laponia y μ el de Perú δ =0.003926982465

FÓRMULA DE MAUPERTUIS

Corolario IV .- De (III) sacamos la fóormula de Maupertuis:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3\mu\left(y_0^2 - y_1^2\right)} \quad (IV)$$

con ε = m - μ

tenemos:

$$m^{\frac{2}{3}} = (\mu+\varepsilon)^{\frac{2}{3}} = \binom{\frac{2}{3}}{0}\mu^{\frac{2}{3}} + \binom{\frac{2}{3}}{1}\mu^{-\frac{1}{3}}\varepsilon + \binom{\frac{2}{3}}{2}\mu^{-\frac{4}{3}}\varepsilon^2 + \rho$$

y despreciando ρ , o sea, el resto de esta serie nos queda:

$$m^{\frac{2}{3}} = \mu^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\mu^{-\frac{1}{3}}\varepsilon - \frac{1}{9}\mu^{-\frac{4}{3}}\varepsilon^2$$

que sustituida en (III) nos da (IV), después de despreciar de nuevo pequeñas cantidades.

Si m es el de Laponia y μ la del Perú δ=0.0039346831

LONGITUD DE UN GRADO DE MERIDIANO DADA SU LATITUD

Corolario V .- Tomando en (IV) la μ del Perú que $\Rightarrow$ $y_1 = 0$ tenemos:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3\,\mu\,y_0^2} \quad (V)$$

de (V) sacamos:

$$m = \left(\frac{3\,sen^2\varphi}{265} + 1\right)\mu \quad (V')$$

Corolario VI .- Si en (V) m es la de Laponia, $\Rightarrow$ $y_0 = 1$ obtenemos:

$$\delta = \frac{\varepsilon_P}{3\,\mu} \qquad (VI)$$

como $\varepsilon_P =$ 111,946 - 110,640 = 1,306 sacamos que $\delta =$ 0,0039346831

EXCESO DEL RADIO ECUADOR CONOCIDO EXCESO GRADO 45º

Corolario VII .- Como en (V) $\delta = R - 1$ y μ son constantes, también lo será el siguiente cociente:

$$\frac{y_0^2}{\varepsilon} = K \Rightarrow \frac{y_2^2}{\varepsilon_2} = \frac{y_3^2}{\varepsilon_3} \quad (VII)$$

Corolario VIII .- Si tomamos $m45º = 111{,}190$ Km., (V) se convierte en:

$$\delta = \frac{\varepsilon_{45^{º}}}{3\mu_{sen}{}^2 45^{º}} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon\, 45^{º}}{\frac{3\mu}{2}} = \frac{2\,\varepsilon_{45^{º}}}{3\mu} \quad (VIII)$$

como $\varepsilon 45º = 111{,}190 - 110{,}640 = 0{,}550$ aplicando (VIII) tenemos: $\delta = 0{,}0033140516$

HACIA EL CÁLCULO DEL GRADO DEL ECUADOR

Corolario IX .- La (VIII) la podemos escribir así:

$$\frac{\mu}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{3}{2}\,\delta} \qquad (IX)$$

Corolario X .- Como los grados de meridiano m son proporcionales a sus radios de curvatura y el grado del propio Ecuador κ lo es a su radio R, sacamos:

$$\frac{m\ R}{(1 + (R^2 - 1)\ y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\kappa}{R}$$

de donde:

$$\frac{m}{\kappa} = \frac{(1 + (R^2 - 1)\ y^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2} \qquad (X)$$

EXCESO DEL GRADO DEL ECUADOR

Corolario XI .- Si m es el del Perú m=μ ⇒ y=o entonces la (X) se convierte en:

$$\frac{\mu}{\kappa} = \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{\kappa} = \frac{1}{1+2\delta} \qquad (XI)$$

haciendo uso del inicio del Corolario (III).

Corolario XII .- Como una proporción se conserva al restarle a cada consecuente su antecedente, de (XI) obtenemos:

$$\frac{\mu}{\varepsilon_E} = \frac{1}{2\delta} \qquad (XII)$$

siendo ε_E el exceso del grado κ.

GRADO DE MERIDIANO IGUAL AL DEL ECUADOR

Corolario XIII .-

Por (V) y (XII) tenemos:

$$\frac{\mu}{\varepsilon_P} = \frac{1}{3\,\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_E}{\varepsilon_P} = \frac{2}{3} \quad (XIII)$$

Corolario XIV .- De (XIII) y (VII) sacamos:

$$\frac{3}{2} = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_E} = \frac{y_P^2}{y_E^2} = \frac{1}{sen^2\,\varphi} \qquad (XIV)$$

siendo φ la latitud del lugar donde la longitud del grado de meridiano coincide con el grado del propio Ecuador y como:

$$sen^2\,\varphi = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi = 54^\circ\ 44'\ 8.2''$$

LAS DUDAS DE JORGE JUAN

Jorge Juan Santacilia decía: " Yo he calculado varias veces $\Re$, y siempre la he concluido distinta, valiéndome de distintos grados; lo que prueba, que no están estos entre sí en la razón que pide el Corolario VII. Según éste es preciso que las cantidades 0'5500311 Km., 1'3060483 Km. en que los grados de latitudes 45º y 66º 31' exceden respectivamente al contiguo al Ecuador, sean entre sí como los cuadrados de los senos de dichas latitudes, lo que no se hallará si se examina".

En efecto tenemos que y_2 = sen 45º , y_3 = sen 66º 31' , ε_2 = 0,5500311 y ε_3 = 1,3060483 por lo tanto:

$$\text{sen}^2 45º/0{,}5500311 = 0{,}9090395$$

$$\text{sen}^2 66º31'/1{,}3060483 = 0{,}6440894$$

que se diferencian en algo más de dos décimas.

JORGE JUAN EL INVESTIGADOR

Y continúa diciendo Jorge Juan y Santacilia, en su obra Observaciones Astronómicas, " Por este motivo quieren algunos, que no sea una elipse. Pero muy lejos de creer yo, que las disparidades, que se hallan en los excesos de los grados, procedan de la suposición hecha, de que la curva sea una elipse, discurro no nacen más, que del corto yerro, que inevitablemente se debe cometer en las medidas de los grados, como se verá en el libro siguiente" (refiriéndose al Libro VIII " De las Experiencias del Péndulo simple, y conclusión de la Figura de la Tierra”).

ERRORES ASUMIBLES SEGÚN JORGE JUAN

Por el Corolario (IX) $\varepsilon_{45º} = 3\mu\delta/2 = 0{,}62626 \Rightarrow \mu_{45º} =$ 111,26668 Km. cuando los franceses sobre el terreno sacaron $\mu_{45º}$ = 111,190 Km., o sea, **76,68 m. menos**.

Del Corolario (VI) podemos sacar la longitud del grado de meridiano m_P en el Polo, pues: $\varepsilon_P = 3\mu\delta = 1{,}25233 \Rightarrow m_P$ = 111,89275 Km. cuando en Laponia m_P = 111,95644 Km. tenía **63,69 m. más**. Con el Corolario (XII) calculamos la longitud del grado κ del Ecuador: $\varepsilon_K = 2\mu\delta = 0{,}83502 \Rightarrow \kappa = 111{,}47544$, cuando otros dieron k=111,5387, o sea, **63,26 m. más**.

Aplicando V' encontramos $m_{66º29'}$ =111,69353 Km. cuando al medirlo su longitud fue de **253,13 m. más**, o sea, 111,94666 Km.

Y EL DE NOVELDA

JORGE JUAN SANTACILIA

LE DIO FORMA A LA TIERRA.

Como el grado κ del Ecuador vale κ=111,5387

R_E=radio Ecuador= = 6.390,6968Km.

Eje de la Tierra= =12.733,343 Km.

Luego la Tierra es 48 Km. más ancha que alta

FIN

GRACIAS

A

TODOS